数理経済学最終レポート **KKM Theorem** による均衡の存在証明：解答例

Ken Urai　　January 25, 2012

KKM Theorem を用いて、R^n の標準単体 Δ 上で定義された超過需要関数 $f:\Delta \to R^n$ の値が 0 以下となる価格（一般均衡価格）の存在を示す。（講義中の議論の不十分であったところについて、そのまとめ。）

【解答例】: 連続な超過需要関数 $f:\Delta \ni p \mapsto (f_1(p),\dots,f_n(p)) \in R^n$ を用いて、以下のような特性を持つ連続な価格調整関数 $g:\Delta \ni p \to (g_1(p),\dots,g_n(p)) \in \Delta$ を作れたとする。

> **（特性）**: 各 $p \in \Delta$ および $i = 1,\dots,n$ について $f_i(p) > 0$ である限り、$g_i(p) > p$ （つまり需要が供給を超えているならその財の価格を上げる）。

このとき、各 $i = 1,\dots,n$ について

$$C^i = \{p \in \Delta |\, g_i(p) \leqq p\}$$

と定義すると、族 $\{C^i | i = 1,\dots,n\}$ は KKM 定理の（条件）$\mathrm{co}\{e^{i_1},\dots,e^{i_m}\} \subset \bigcup_{j=1}^m C^{i_j}$ を満たす。実際 $\mathrm{co}\{e^{i_1},\dots,e^{i_m}\}$ が作る辺上では、その辺を作る頂点 $e^{i_1},\dots,e^{i_m}$ のうちのいずれかが表す座標 $i_1,\dots,i_m$ について、それらの間ですでに和が 1 になっているため、その座標に相当する財の価格のうちのいずれかは、今まで以下になるしかない。つまり、そうした点については、いずれかの C^{i_j} に入るしかないということである。また内点については、全座標について足して 1 なのであるから、いずれかの財の価格が今まで以下になるしかない（いずれかの C^i に入るしかない）のは自明である。各 C^i が閉集合になることについては、調整関数 g の連続性による。

KKM Theorem によって $p^* \in \bigcap_{i=1}^n C^i$ が存在する。$f(p^*) \leqq 0$ であることは、上記（特性）より明らか。■